

Silkeborg 16-02-15

MATEMATIK-KOMPENDIUM

TIL KOMMENDE ELEVER PÅ DE GYMNASIALE

UNGDOMSUDDANNELSER I SILKEBORG

(HF, HHX, HTX & STX)

FACITLISTE

Udarbejdet af matematiklærere fra HF, HHX, HTX & STX.

PS: Hvis du opdager fejl i kompendiet/løsningerne, så send venligst besked til fk@silkeborg-gym.dk

- 2.1. a) $3 \cdot 6 + 2 = 20$ b) $5 - 4 \cdot 2 = -3$ c) $7 + 4 \cdot 2 = 15$
d) $3 - 4 \cdot 2 \cdot 5 + 1 = -36$ e) $8 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 13$ f) $4 - 5 - 6 - 1 = -8$
- 2.2. a) $3 + (5 - 3) = 5$ b) $3 - 2^2 = -1$ c) $5 \cdot (-2) - (3 - 1) = -12$
- 2.3. a) $x - (2 + 3x) = -2x - 2$ b) $7a + (4 - 3a) = 4a + 4$ c) $8x^2 - (4x^2 + 5) - (x^2 - 6) = 3x^2 + 1$
- 2.4.
- a) $7 + \frac{12-2}{2 \cdot 5} = 90$ **Falsk**
- b) $\frac{\sqrt{20 - (-5)}}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2}$ **Sandt**
- c) $\sqrt{15 + 34} = 7$ **Sandt**

Opgaver:

- 3.1. a) Hvilket tal står som tæller i brøken $\frac{8}{11}$? **8**
b) Hvilket tal står som nævner i brøken $\frac{3}{5}$? **5**

3.2.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = & \text{b) } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = & \text{c) } \frac{3}{7} - \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{6} \right) = \\ \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} & \frac{4}{8} + \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} & \frac{18}{42} - \left(\frac{70}{42} - \frac{7}{42} \right) = -\frac{45}{42} = -1\frac{1}{14} \\ \\ \text{d) } \frac{1}{2} + \frac{4}{11} - 2 = & \text{e) } 1 - \frac{9}{13} + \left(\frac{2}{13} - 3 \right) = & \\ \frac{11}{22} + \frac{8}{22} - 2 = \frac{19}{22} - 2 = -1\frac{3}{22} & \frac{4}{13} + \left(-2\frac{11}{13} \right) = -2\frac{7}{13} & \end{array}$$

- 3.3. Skriv resultaterne fra 3.2 som *uforkortelig brøk*.
Svarene ses ovenfor i 3.2

3.4.

a) $\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{8}{21}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\right) =$

$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{12} + \frac{9}{12}\right) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$

c) $\frac{\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right)}{3} =$

$\frac{15}{3} = \frac{5}{1} = 5$

d) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}\right) =$
 $\frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$

e) $6 - \frac{13}{3} - \left(1 + \frac{4}{9}\right) =$
 $6 - 4\frac{1}{3} - 1\frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

3.5.

a) $\frac{4}{7} : 3 = \frac{4}{7 \cdot 3} = \frac{4}{21}$

b) $\frac{2}{7} : \frac{3}{9} = \frac{2}{7} \cdot \frac{9}{3} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

c) $6 : \frac{4}{5} = 6 \cdot \frac{5}{4} = \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2}$

3.5.

a) $\frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$

b) $\frac{12x^2}{7x} = \frac{12x}{7}$

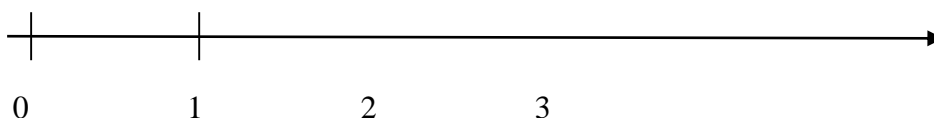
c) $\frac{12x^2 - 3x^2}{7x} = \frac{9x^2}{7x} = \frac{9x}{7}$

d) $\frac{3a}{4a^2} = \frac{3}{4a}$

e) $\frac{3x - 2x}{2x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

3.6.

Inddel denne tallinje i 5 dele:



3.7.

Markér følgende brøker på tallinjen:

$\frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{25}{8}, \frac{-3}{4}$



3.8.

Jens fylder $\frac{2}{3}$ af sofaen. Du må fylde $\frac{1}{4}$.

Kan I være der begge to?

Ja, vi kan være der begge to, da $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$

Og $\frac{11}{12} < 1$.

Hvis der er plads tilbage, hvor meget er det så? – svar i brøker.

Det, der er tilbage er $\frac{1}{12}$

3.9. En mus har gnavet $\frac{1}{9}$ af den runde ost.

Din mor har sagt, at du må tage halvdelen af resten. Hvor stor brøkdel får du?

Resten er $\frac{8}{9}$, så jeg får halvdelen af $\frac{8}{9}$ som er $\frac{4}{9}$

3.10.

Per foreslår: Per får 4 skilling Poul får 4 skilling
Poul foreslår: Per får 3 skilling Poul får 5 skilling
Lise foreslår: Per får 1 skilling Poul får 7 skilling

De to drenge har 8 brød i alt, så når de tre deler ligeligt, får de hver $\frac{8}{3}$

Per afleverer

$$3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

Poul afleverer

$$5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

Da Poul afleverer 7 gange som meget brød som Per, foreslår Lise den mest retfærdige deling.

4.1. a) $4 + 3x - 5 = 3x - 1$ b) $7 - x - 2x = -3x + 7$ c) $5x - (x + 2x) = 2x$

d) $2x + x^2 - (x - 4x^2) = 5x^2 + x$ e) $6 + x - (3 + x - (x - 3)) = x$ f) $2a + 3 - (3a - 1) = -a + 4$

4.2. a) $5 \cdot (2 - z) - 9 + 6z = z + 1$ b) $3 \cdot (2 + x) - 2x = x + 6$ c) $7(2 + a) - (10 + 6a) = a + 4$

4.3. a) $2x + 2y = 2(x + y)$ b) $4x - 8 = 4(x - 2)$ c) $ab - ca = a(b - c)$

4.4. a) $(a + b)x - (a + b) = (a + b)(x - 1)$ b) $y(x + z) - 2(x + z) = (x + z)(y - 2)$ c) $(a + 2)b - (a + 2)c = (a + 2)(b - c)$

4.5. a) $(5x) \cdot 3 = 15x$ b) $(5x) \cdot x = 5x^2$ c) $(4x) \cdot (3x) = 12x^2$

4.6. a) $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$ b) $(x - 1)(x + 7) = x^2 + 6x - 7$ c) $(x + 3)(x + 1) = x^2 + 4x + 3$

d) $(a - 1)(2 + a) = a^2 + a - 2$ e) $(y - 4)(1 - y) = -y^2 + 5y - 4$ f) $(q + 1)(1 - q) = -q^2 + 1$

5.1 $2x + 3 = 7$
 $2x + 3 = 7$
 $x = 2$

5.2 $3x - 5 = 2x + 5$
 $x = 10$

5.3 $3(x + 2) = x + 8$
 $3(x + 2) = x + 8$
 $x = 1$

5.4 $x - 2(x - 1) = 2x + 5$
 $x - 2(x - 1) = 2x + 5$
 $x = -1$

5.5 **$28x = 78$**

5.6

a) $45 \text{ kr.} + 6 \cdot 15 \text{ kr.} = 135 \text{ kr.}$

b)

Efter fast startgebyr har Anna: $100 \text{ kr.} - 45 \text{ kr.} = 55 \text{ kr.}$

Antal km Anna kan køre i taxa: $55 : 15 \text{ km} \approx 3,6 \text{ km}$

Det kan også beregnes ved en ligning, hvor x er antal km

$15x + 45 = 100$

c) $y = 15x + 45$

5.7 Vi antager, at bredden er x og beregner bredden ved at bruge en ligning.
 $x \cdot 3,14 = 38,5$
 $x = 12,255$
Bredden skal være 12,6 m

5.8

a) Indsæt $x = 18$ i den oprindelige ligning og det er vist.

b) Fra første til anden linje: der ganges med 7 på begge sider af lighedstegnet.

Fra anden til tredje linje: der deles med 3 på begge sider af lighedstegnet

Fra tredje til fjerde linje: der lægges 4 til (adderes) på begge sider af lighedstegnet

5.9

a)

Vi indsætter -2 i stedet for x på højre side: $4(-2 + 2) - 17 = -17$

Venstre side er -2

Det er altså ikke korrekt regnet.

b)

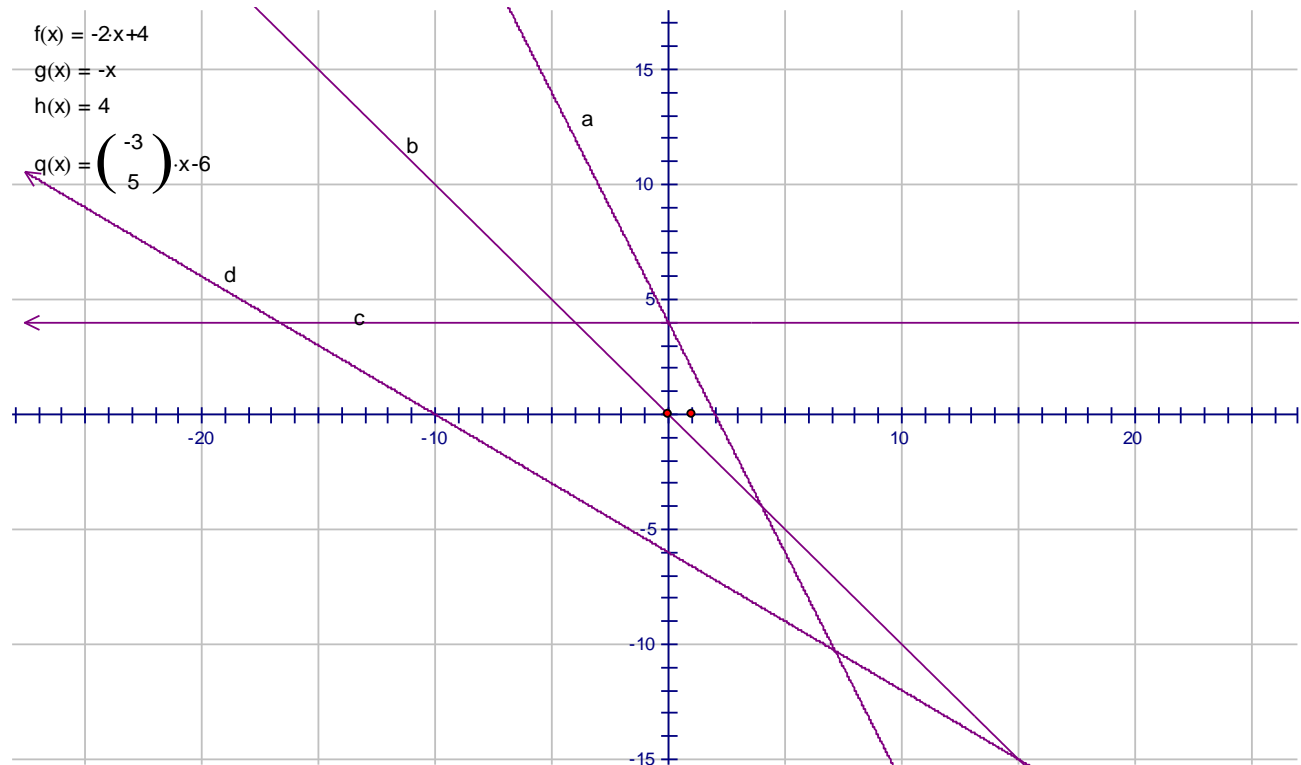
Fra første til anden linje: der ganges ind i parentesen på venstre side

Fra anden til tredje linje: der reduceres på venstre side lighedstegnet

Fra tredje til fjerde linje: der lægges 9 til (adderes) på venstre side af lighedstegnet og trækkes 9 fra (subtraheres) på højre side af lighedstegnet

Fra fjerde til femte linje: der divideres med 4 på begge sider af lighedstegnet

6.1

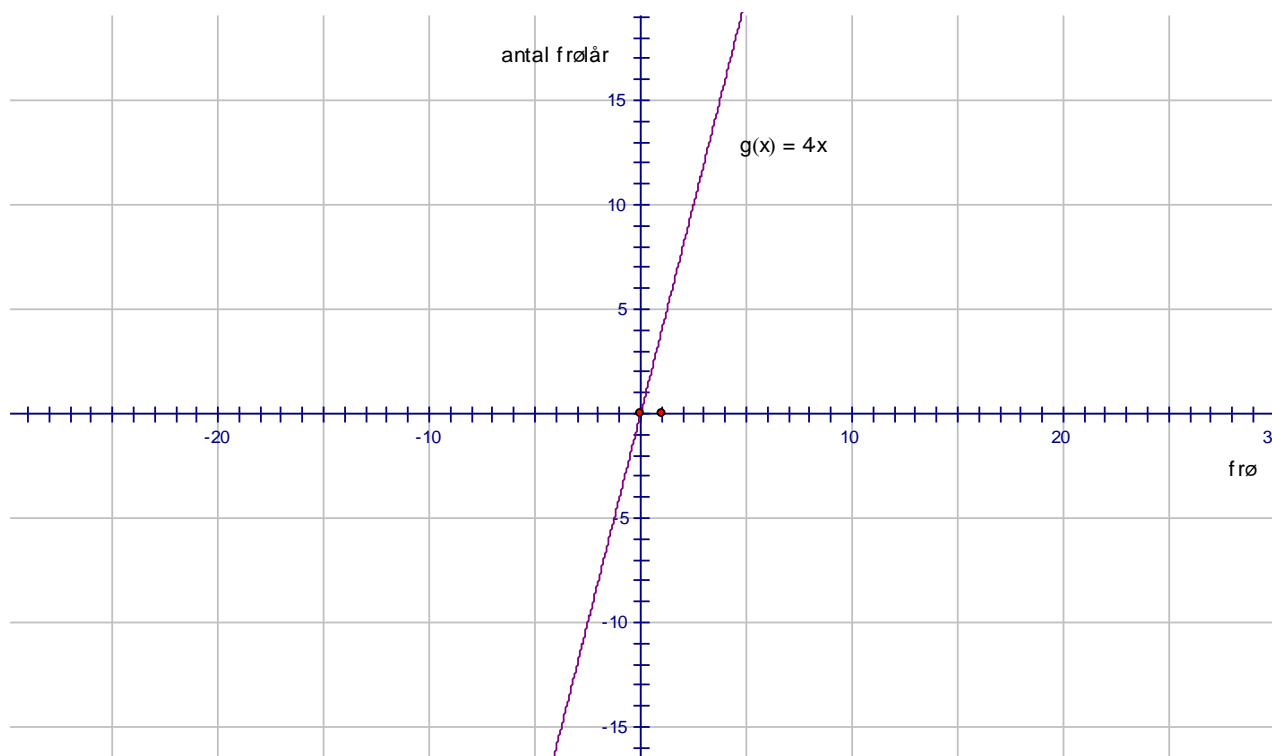


6.2

x er antal frø

y er antal frølår

$$y = 4x \quad \text{eller} \quad f(x) = 4x$$



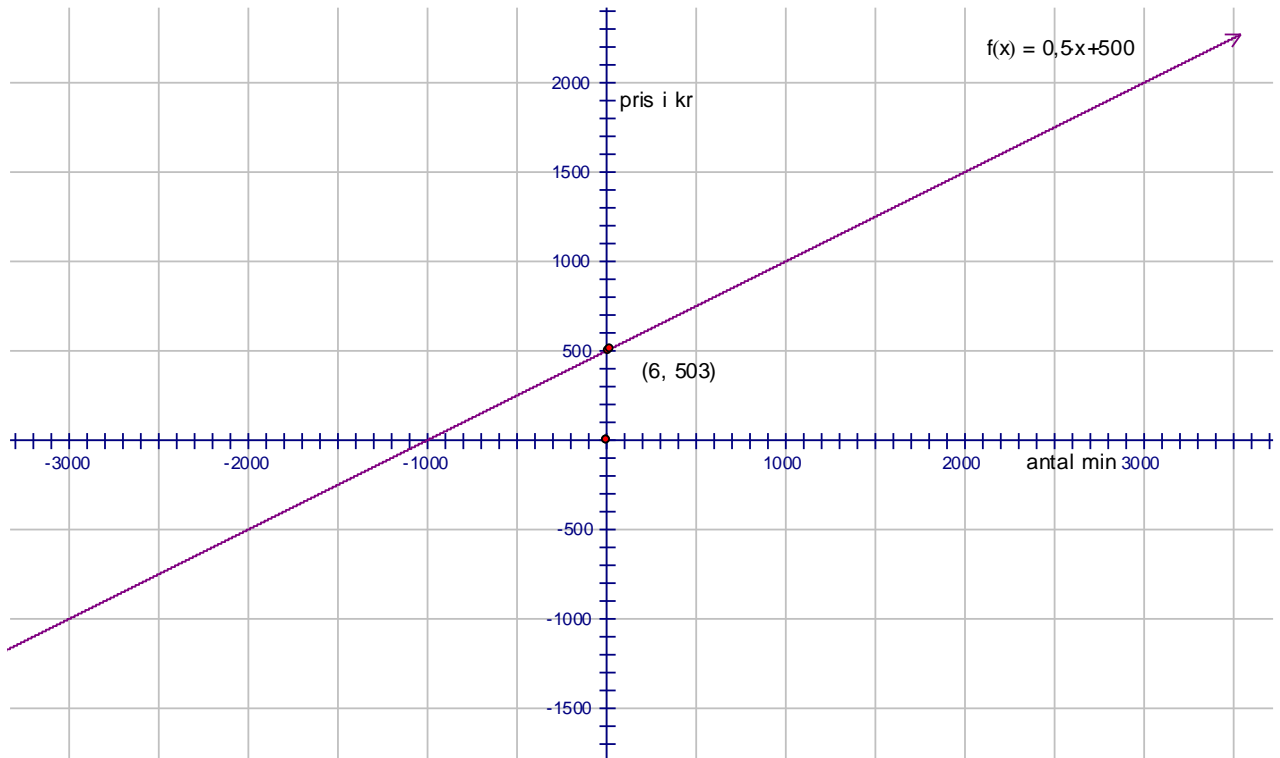
6.3

a.

Samtale i 6 min: 500 kr. + 6 · 0,50 kr. = 503 kr.

b.

$$f(x) = 0,50x + 500$$



6.4

3000 kr. er prisen for en mountain bike år 2000,
for hvis $x = 0$ får vi udtrykket $y = 3000$
200 er den pris, mountain bikes stiger pr. følgende år efter år 2000,
og $x = 1$ er år 2001.

7.1

a) $2^2 \cdot 2^5 = 2^7$

b) $10^{10} \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 10^{15}$

d) $10^3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4 = 10^2$

7.2

a) $\frac{2^7 \cdot 2^4}{2^3} = 2^8$

b) $\frac{10^7 \cdot 10^8}{10^{12}} = 10^3$

c) $\frac{(10^2)^3 \cdot 10^{-5}}{(10^4)^2} = \frac{10}{10^6} = 10^{-5}$

7.3

a) $\frac{2^3 \cdot (2^3)^2 \cdot 2^{-7}}{2^{-3} \cdot (2^2)^3} = \frac{2^2}{2^3} = 2^{-1}$

c) $\frac{(-3)^{-2} \cdot (-3)^4}{(-3)^{-2}} = (-3)^4$

b) $\frac{(-5)^{-4} \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-4}}{(-5)^{-4} \cdot 2^{-8}} =$

7.4

$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1,35^3 \approx 10,31$

Rumfang af dykkerklokke er ca. $10,3 \text{ m}^3$

7.5

$$4 \cdot \pi \cdot 6378160^2 \approx 51121158 \quad \text{Jordens overflade er ca. } 5\,112\,158 \text{ km}^2$$

7.6

$$\frac{1,5 \cdot 10^8}{2,5 \cdot 10^5} = \frac{0,3}{0,5} \cdot 10^3 = 600 \quad \text{Afstanden er 600 gangestørre.}$$

7.7

$$\text{Antal riskorn på det sidste felt: } 2^{64} = 1,8 \cdot 10^{19}$$

$$\text{Vægt af riskornene på sidste felt: } 0,1 \cdot 2^{64} = 0,1 \cdot 1,8 \cdot 10^{19} = 1,8 \cdot 10^{18} \text{ gram}$$

8.1

a) 1,87

b) 0,28362

c) 50 %

d) $\approx 2,9$ %

e) $\approx 428,7$ %

f) $\approx 128,6$

g) $\approx 776,79$ kr.

8.2

Gl. pris	120	385	1067
Rabat, kr.	54	30	192
Rabat, %	45 %	ca. 7,8 %	18 %
Ny pris	66	355	875

8.3

a. Nedsat 3.000 kr. ud af 9.998 kr. er en nedsættelse på ca. 30 %

b. Den gamle pris er 3.998 kr. større end den nedsatte pris på 3.000 kr.

Det er det samme som ca. 133,3 %

8.4

Svar 2 er korrekt, da tabet er 200 kr. ud af 1350 kr. Det svarer til ca. 14,8 %.

8.5

$$\text{Oprindelige pris} \cdot 0,58 \cdot 0,94 = 3400 \text{ kr.}$$

$$\text{Oprindelig pris} = 3400 : (0,58 \cdot 0,94) = \text{ca. } 6236 \text{ kr.}$$

8.6

$$\text{Gennemsnitlige procent: } \sqrt[3]{30} = 1,4592328$$

9.1

Vinklerne B og C er lige store i en ligebenet trekant.

Summen af vinklerne i en trekant er 180° . Så i denne trekant er de hver 30° .

9.2

$$\text{Hypotenusen er } \sqrt{4^2 + 9^2} \neq 9,8$$

9.3 Den anden katete er $\sqrt{11^2 - 6^2} \neq 9,2$

9.4 Forholdet mellem siderne er $\frac{AC}{DE} = \frac{11}{7}$

Længden af siden EF:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{9}{EF} = \frac{11}{7}$$

$$EF \cdot 11 = 9 \cdot 7$$

$$EF \approx 5,7$$

9.5

a) $B = 68^\circ$

$$\frac{a}{\sin 22} = \frac{4}{\sin 90}$$

$$a \cdot \sin 90 = 4 \cdot \sin 22$$

$$a = 4 \cdot \sin 22$$

$$a \approx 1,5$$

$$b = \sqrt{4^2 - 1,5^2} = 3,7$$

b) $a = 12$ $B = 35^\circ$ $A = 55^\circ$

$$\frac{12}{\sin 55} = \frac{b}{\sin 35}$$

$$b \cdot \sin 55 = 12 \cdot \sin 35$$

$$b = 12 \cdot \sin 35 : \sin 55$$

$$b \approx 8,4$$

$$c = \sqrt{12^2 + 8,4^2} \approx 14,6$$

c) $a=5$ $b=7$

$$c = \sqrt{5^2 + 7^2} \approx 8,6$$

$$\tan A = \frac{5}{7}$$

$$A = \text{ca. } 35,5^\circ$$

$$B = 90^\circ - 35,5^\circ = 54,5^\circ$$

9.6 Gæsten har betalt 7,50 kr. for meget

10.1

$$\text{a) } \frac{1}{z+1} + \frac{2}{5} = \frac{2z+7}{5(z+1)} \quad \text{b) } \frac{1}{a-1} - \frac{1}{6} = \frac{a+7}{6(a-1)} \quad \text{c) } \frac{1}{a+1} + \frac{2}{a} = \frac{3a+2}{a(a+1)}$$

$$\text{d) } \frac{1}{x} - \frac{1}{x+c} = \frac{c}{x(x+c)} \quad \text{e) } \frac{3}{2x} + \frac{4}{x+1} = \frac{11x+3}{2x(x+1)} \quad \text{f) } \frac{2}{5x-5} - \frac{1}{5} = \frac{3-x}{5(x-1)}$$

$$\text{g) } \frac{34x+6}{11x+2} - 3 = \frac{x}{11x+2} \quad \text{h) } \frac{1}{5x} + 3 + \frac{2}{3} = \frac{55x+3}{15x}$$

10.2 Omskriv nedenstående brøker ved at forkorte:

$$\text{a) } \frac{x^2+2x+1}{x+1} = x+1 \quad \text{b) } \frac{z^2-2z+1}{z-1} = z-1 \quad \text{c) } \frac{4x^2+4x+1}{2x+1} = 2x+1$$

$$\text{d) } \frac{a^2-1}{a+1} = a-1 \quad \text{e) } \frac{x^2-4}{x+2} = x-2 \quad \text{f) } \frac{9x^2-16}{3x-4} = 3x+4$$

10.3 Omskriv nedenstående brøker ved at forkorte:

$$\text{a) } \frac{x^2+2xy+y^2}{x+y} = x+y \quad \text{b) } \frac{a^2+4ab+4b^2}{a+2b} = a+2b \quad \text{c) } \frac{x^2-y^2}{x+y} = x-y$$
$$\text{d) } \frac{x^2-6xy+9y^2}{3y-x} = 3y-x \quad \text{e) } \frac{4x^2-8xy+4y^2}{3x^2+3y^2-6xy} = \frac{4}{3} \quad \text{f) } \frac{4a^2+4az+z^2}{z^2-4a^2} = \frac{z+2a}{z-2a}$$

10.4 Omskriv nedenstående udtryk ved at sætte på fælles brøkstreg:

$$\text{a) } \frac{1}{a+b} + \frac{3}{a^2-b^2} = \frac{a-b+3}{a^2-b^2} \quad \text{b) } \frac{1}{x+y} + \frac{3}{2x^2-2y^2} - \frac{1}{2} - \frac{y^2+2x+3}{2(x-y)(x+y)} = \frac{-x^2-2y}{2(x-y)(x+y)}$$

$$\text{c) } \frac{1}{a} + \frac{2(a-b)}{a^2-b^2} - \frac{2}{a+b} = \frac{1}{a} \quad \text{d) } \frac{1}{a+b} - \frac{b}{a^2+b^2+2ab} = \frac{a}{(a+b)^2}$$

10.5 Reducer følgende udtryk uden brug af lommeregner:

$$a) \frac{16^2 \cdot 2^{-3} \cdot 8}{4^3 \cdot 2^{18} \cdot \frac{1}{64}} = 2^{-10}$$

$$b) \frac{(-3)^{-2} \cdot 6^{-2}}{90^{-2}} = 25$$

$$c) \frac{(3^2)^3 \cdot (3^{-4})^2 \cdot 2}{3^{-2} \cdot 3^6} = 2 \cdot 3^{-6}$$

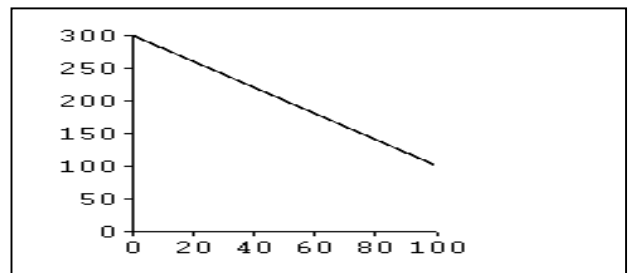
$$d) \frac{(-3)^{-4} \cdot (-4)^{-1}}{(-12)^{-2}} = \frac{4}{9}$$

$$e) \frac{(-4)^{-1} \cdot (-5)^{-1}}{(-100)^{-1}} = -5$$

10.6

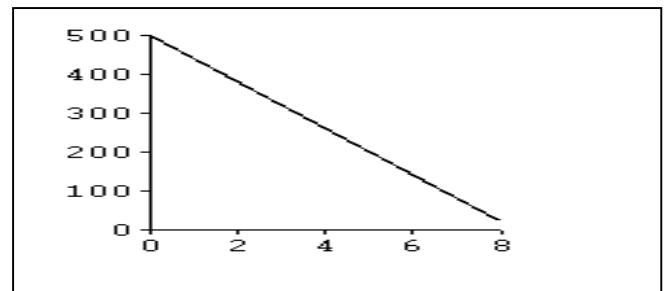
1. Pris-afsætningskurve (x = afsætning, y = pris)

2. afsætning 110 stk. og pris kr. 80,-
 afsætning 75 stk. og pris kr. 150,-
 afsætning 25 stk. og pris kr. 250,-
3. Pris 150 og afsætning 75 stk.
 Pris 200 og afsætning 50 stk.
4. Forskrift $f(x) = -2x + 300$



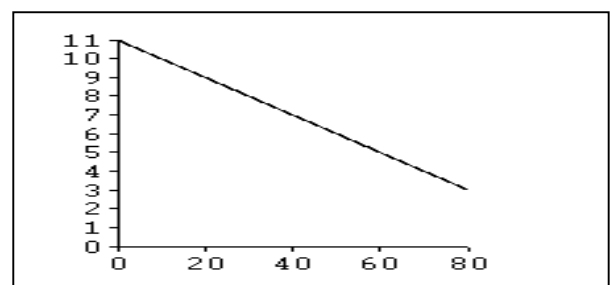
10.7

1. Afskrivningsforløb værdi i 1.000
2. Årlig afskrivning: kr. 60.000 (480.000 : 8)
3. Værdi efter 5 år kr. 200.000 ($500 - 5 \cdot 60 = 200$)
4. Forskrift for værdi $f(x) = -60.000x + 500.000$



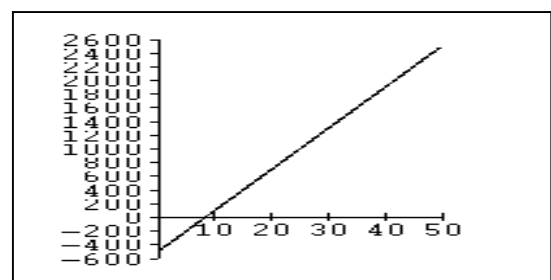
10.8

1. Pris-afsætningskurve i 1.000
2. afsætning 25 stk. og pris kr. 8.500,- pr. stk
 afsætning 75 stk. og pris kr. 3.500,- pr. stk
3. pris kr. 4.000,- og afsætning 70 stk.
 pris kr. 7.500,- og afsætning 35 stk.
4. Forskrift for funktionen $f(x) = -100x + 11.000$



10.9

1. 200 stk. koster: $50 \cdot 200 + 500 = 10.500$
 500 stk. koster: $50 \cdot 500 + 500 = 15.500$
 100 stk. koster: $50 \cdot 100 + 500 = 5.500$
2. Forskrift for købspris:
 $f(x) = 50x + 500$
3. $50x + 500 = 4350 \Leftrightarrow x = 77$ dvs. der er solgt 77 stk.
4. graf for den samlede indkøbspris



10.10

1. $200 \cdot 110 = 22.000$

$500 \cdot 110 = 55.000$

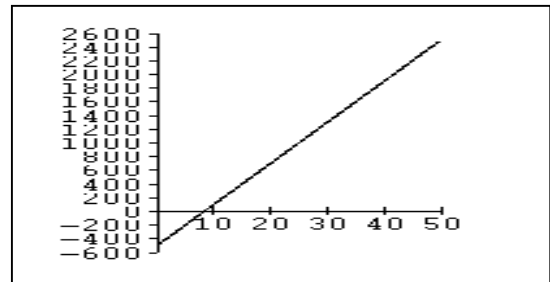
2. $22.000 - 10.500 = 11.500$

$55.000 - 15.500 = 39.500$

3. Fortjeneste:

$f(x) = 110x - (-50x + 500) = 60x - 500$

4. Graf for fortjeneste:



10.11

Ja, ved halvering

10.12

De mødes kl. 12.36

10.13

Han løber 20 km/t

10.14

Gruppen bestod af 45 drenge og 23 piger

10.15

Arne får 1.100.000, Bent får 275.000, Christian får 550.000

10.16

Blandingen skal indeholde 37,5 kg Brazil Extra og 62,5 kg Brazil Medium

10.17

Kunden skal købe $13\frac{1}{3}$ meter

10.18

100.000 kr er vokset til 124.146 kr.

Gennemsnitsforrentningen er 5,6 % (én decimal).

Renten beregnes ikke af samme tal de fire år.

10.19

På den første skole er gennemsnitsalderen 39 år.

På den anden skole er gennemsnitsalderen 38,0 år (med én decimal).